Ejercicio sobre transformaciones canónicas

Eric Sànchez

Agosto 2019

Si tenemos un hamiltoniano $H(q,p) = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}$ y después de hacerle una transformación canónica pasamos de las variables (q,p) a otras (Q,P) y el nuevo hamiltoniano es $K(Q,P) = P$, ¿cual es la expresión de Q?

Para empezar, una transformación canónica debe cumplir que las ecuaciones de Hamilton "funcionen bien", es decir que deberían cumplirse

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{1}$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} \qquad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} \tag{2}$$

y además, si utilizamos la notación simpléctica, deberá cumplirse que el determinante de la matriz de la transformación, $\hat{M}$, sea 1. Esta condición, *by the way*, es equivalente a decir que

$$\{Q,P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1 \tag{3}$$

Teniendo en cuenta las condiciones que se deben cumplir, si empezamos por la primera encontramos lo siguiente:

$$\dot{q} = p \qquad \dot{p} = -q \tag{4}$$

$$\dot{Q} = 1 \qquad \dot{P} = 0 \tag{5}$$

Con esto y contando con la ecuación de la transformación

$$\dot{\mathbf{Z}} = \hat{M} \cdot \dot{\mathbf{z}} \tag{6}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 = \frac{\partial Q}{\partial q} p - \frac{\partial Q}{\partial p} q \\ 0 = \frac{\partial P}{\partial q} p - \frac{\partial P}{\partial p} q \end{cases} \tag{7}$$

La segunda expresión puede ser expresada de otra manera.

$$\frac{\partial P}{\partial q}p = \frac{\partial P}{\partial p}q \;\; ; \;\; \frac{\partial P}{\partial q} = \frac{\partial P}{\partial p}\frac{q}{p} \tag{8}$$

Con esto podemos ir a la ecuación (3) y sustituir.

$$\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial p}\frac{q}{p} = 1 \tag{9}$$

$$\frac{\partial P}{\partial p}\left(\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{q}{p}\right) = 1 \tag{10}$$

De la primera ecuación de (7), si dividimos a ambos lados por p, podemos obtener que:

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{q}{p} \tag{11}$$

Que es justo lo que tenemos en el paréntesis anterior. Sustituimos:

$$\frac{\partial P}{\partial p}\frac{1}{p} = 1 \;\; ; \;\; \frac{\partial P}{\partial p} = p \tag{12}$$

Integrando:

$$P(q,p) = \int p \; dp \, + \, f(q) = \frac{p^2}{2} + f(q) \tag{13}$$

Para conocer que es $f(q)$ derivamos parcialmente P respecto q y usamos la expresión (8) y (12).

$$\frac{\partial P}{\partial q} = \frac{df}{dq} = p\frac{q}{p} = q \tag{14}$$

Integrando encontramos que $P(q,p) = \frac{p^2+q^2}{2}$. Es fácil ver que como $P = K$ y $P = H$ entonces $H = K$. Además de las ecuaciones de Hamilton vemos que P es una constante del movimiento y por lo tanto también lo serán H y K. Esto podríamos haberlo sabido también del hecho de que la derivada parcial de H respecto del tiempo es cero, ya que no aparece t en la expresión del hamiltoniano.

Pero el enunciado del problema nos pide que encontremos Q y no P. La ecuación diferencial en derivadas parciales que nos da la información sobre Q de (7) sería dura de resolver. Pero de las ecuaciones de Hamilton encontramos que $Q = t + c$, donde c es una constante arbitraria. Para que sea una respuesta correcta deberemos comprobar que satisface la segunda condición que hemos mencionado al principio, que la matriz $\hat{M}$ tenga determinante 1. Sin embargo no podemos completar aún la matriz puesto que no sabemos cuanto valen las derivadas parciales de Q respecto de q y p. Por eso opto por resolver las ecuaciones del movimiento en las variables antiguas.

$$\ddot{q} = \dot{p} = -q \Rightarrow \ddot{q} + q = 0 \tag{15}$$

Es la ecuación del movimiento de un oscilador armónico con una $\omega^2 = 1$. Por lo tanto su solución (y la de p) será:

$$q(t) = A \cdot \cos(t + \phi_0) \ , \quad p(t) = -A \cdot \sin(t + \phi_0) \tag{16}$$

Donde A y ϕ_0 son las constantes arbitrarias. Conociendo la expresión de P:

$$P = \frac{p^2 + q^2}{2} = \frac{A^2 \cos^2(t + \phi_0) + A^2 \sin^2(t + \phi_0)}{2} = \frac{A^2}{2} \Rightarrow A = \sqrt{2P} \tag{17}$$

Por lo tanto q y p quedan:

$$q(t) = \sqrt{2P} \cdot \cos(t + \phi_0) \ , \quad p(t) = -\sqrt{2P} \cdot \sin(t + \phi_0) \tag{18}$$

Viendo la expresión de Q y diciendo que $c = \phi_0$:

$$q(Q, P) = \sqrt{2P} \cdot \cos Q \ , \quad p(Q, P) = -\sqrt{2P} \cdot \sin Q \tag{19}$$

Con estos resultados podemos encontrar el jacobiano $\left(\frac{\partial(q,p)}{\partial(Q,P)}\right)$. Este jacobiano es la matriz inversa de la matriz $\hat{M}$ ya que es la matriz que nos pasa de las variables (Q, P) a (q, p). Puesto que el determinante de una matriz es el inverso del determinante de la matriz inversa, si el determinante del jacobiano es 1 el de la matriz $\hat{M}$ también y querrá decir que ya tendremos la solución al problema. Procedemos a construir el jacobiano.

$$\frac{\partial q}{\partial Q} = -\sqrt{2P} \sin Q = p = \dot{q} \tag{20}$$

$$\frac{\partial q}{\partial P} = \sqrt{2} \cos Q \cdot \frac{P^{-1/2}}{2} = \frac{\cos Q}{\sqrt{2P}} = \frac{q}{2P} = \frac{q}{p^2 + q^2} \tag{21}$$

$$\frac{\partial p}{\partial Q} = -\sqrt{2P} \cos Q = -q = \dot{p} \tag{22}$$

$$\frac{\partial p}{\partial P} = -\sqrt{2} \sin Q \cdot \frac{P^{-1/2}}{2} = \frac{-\sin Q}{\sqrt{2P}} = \frac{p}{2P} = \frac{p}{p^2 + q^2} \tag{23}$$

Por lo que el jacobiano queda:

$$\left(\frac{\partial(q, p)}{\partial(Q, P)}\right) = \begin{pmatrix} p & \frac{q}{p^2+q^2} \\ -q & \frac{p}{p^2+q^2} \end{pmatrix} \tag{24}$$

Se puede ver que el determinante da 1. Eso quiere decir que el determinante de la matriz $\hat{M}$ es 1 y ahora se cumplen todas las condiciones necesarias para que la transformación sea canónica.

Respuesta: $Q = t + \phi_0$

1 Anexo

- La matriz $\hat{M}$ de la transformación es:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \frac{p}{p^2+q^2} & \frac{-q}{p^2+q^2} \\ q & p \end{pmatrix} \tag{25}$$

  Podemos ver que las derivadas de Q respecto las variables viejas son solución para la primera ecuación de (7).

- Las derivadas parciales de las variables antiguas respecto de Q son las derivadas totales de esas mismas variables respecto el tiempo. No es una simple casualidad puesto que, como hemos visto, Q es el tiempo (más una constante).

- Sabiendo que el movimiento es el de un oscilador armónico no es difícil ver que el hamiltoniano especificado es a la vez la energia. Este oscilador (si lo imaginamos como una masa conectada a un punto fijo por un resorte) tiene una masa $m = 1$ y el muelle tiene una constante recuperadora $k = 1$, lo que nos da un resultado comentado en el texto principal que es que $\omega = 1$. Como hemos visto que el hamiltoniano es constante entonces sabemos que la energia se conserva. Tenemos una serie de igualdades bastante significativas.

$$H = E = K = P = \frac{A^2}{2} \tag{26}$$

  Podemos ver una relación esperada en el oscilador armónico. La amplitud del movimiento (A) al cuadrado es proporcional a la energia del oscilador. $E \sim A^2$.